Formale Methoden für eingebettete Systeme

2. Grundlagen

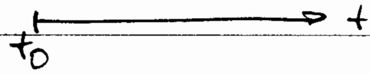
Uns interessieren <u>dynamische</u> Eigenschaften von Systemen, keine statischen.

[Bsp.: Bremst ein Auto, wenn man auf die Bremse tritt?
Nicht: Farbe des Autos.]

$\Rightarrow$ <u>Verhalten</u> eines Systems <u>über der Zeit</u> muss beschrieben u. analysiert werden können.

2.1 Zeitachsen

(1) kontinuierlich („dicht")

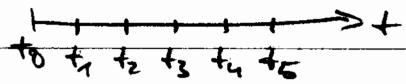


z.B. $t \in \mathbb{R}_0^+$ (oder $t \in \mathbb{R}$)

(Häufig wird nur positive Zeit betrachtet, 0 = „Urknall"; aber auch Beginn bei $-\infty$ möglich)

(2) diskret

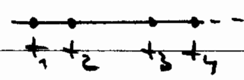
z.B. $t \in \mathbb{N}_0$



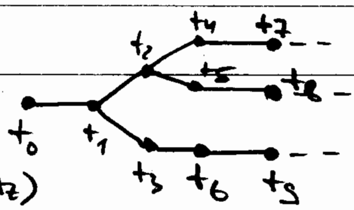
$t_{n+1} - t_n = \Delta t = \text{const.}$ „äquidistante Zeitschritte"

(3) Ordnung von Zeitpunkten ohne Quantifizierung

(3.1) Totalordnung $t_0 < t_1 < t_2 \ldots$



(3.2) Halbordnung



(z.B. abgeleitet aus Kausalbeziehungen → Petrinetz)

2.2 Signale (zeitabhängige Variablen)

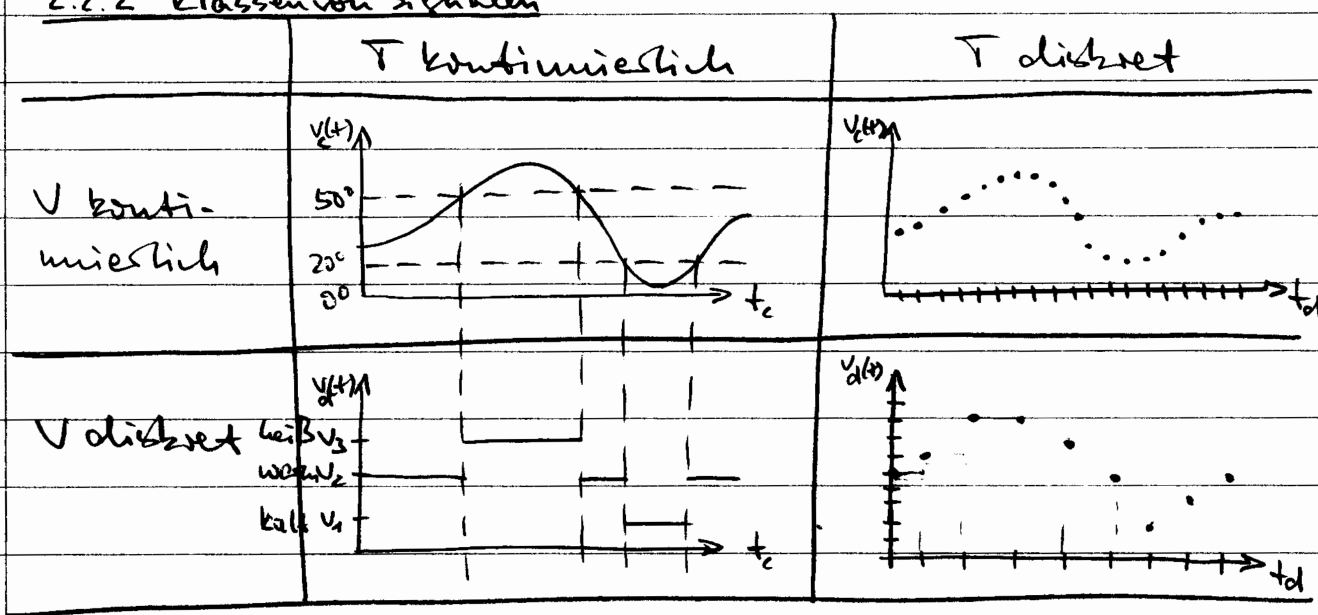
2.2.1 Def.

T: Menge aller Zeitpunkte

V: Wertemenge einer Variablen

Signal $v: T \to V$

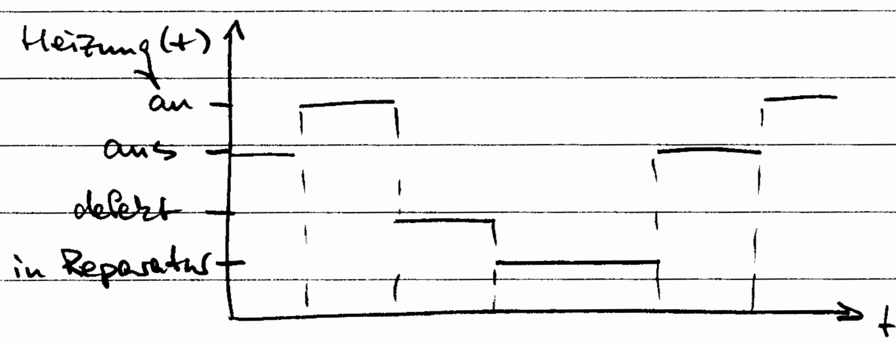
2.2.2 Klassen von Signalen



Für nicht quantifizierte Zeit ist diese Darstellung nicht sinnvoll.

Beispiel: Temperatur (s.o.)

anderes Beispiel für linken unteren Quadranten:



[?] Unterschied?

$\Rightarrow$ Diskrete Wertemenge ist nicht notwendigerweise geordnet

V kontinuierlich

↓ = „Diskretisierung"

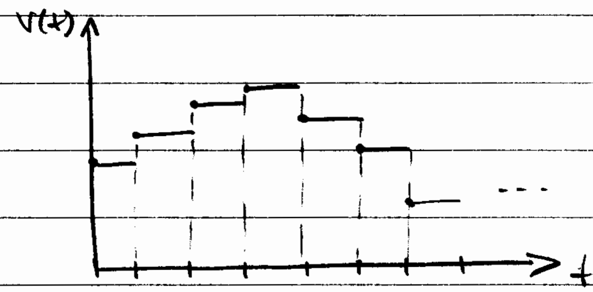
V diskret

(für Informatiker:
= eine Abstraktion)

T kontinuierlich ⟶ T diskret

= „Abtastung" („Sampling")

„Abtastung und Halten" („Sample and Hold"):



[?] (im Ergebnis V- und t-Achse kontinuierlich)

<u>„Quasikontinuierliche" Signale</u>

= relativ feine Diskretisierung,
z.B. durch A/D-Wandler zur Verarbeitung im Rechner

im Gegensatz zu grober Diskretisierung auf wenige (häufig symbolisch interpretierte) Werte

<u>Bsp.:</u> Temperaturwert in 12 Bit-Auflösung → kontin. Regelungstechnik

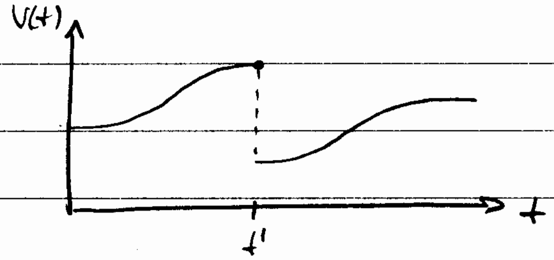
vs. {kalt, warm, heiß} → diskrete Steuerungstechnik

Zweite Klasse wird zur besseren Unterscheidung auch als „ereignisdiskret" bezeichnet. ←

„Hybride" Signale:

= Mischung aus (wert)kontinuierlichen und (wert)diskreten Signalen (in der Regel bei kontinuierlicher Zeitachse)

(1) Bsp.:



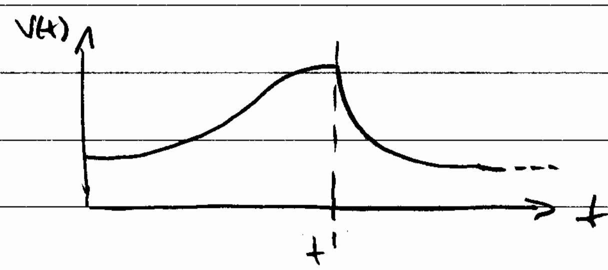
(? Kommt das in der Natur vor?)

$$\lim_{\Delta t \to 0} v(t'-\Delta t) \neq \lim_{\Delta t \to 0} v(t'+\Delta t)$$

→ „Sprung" (engl. "Jump") als hybrides Phänomen

[Gewöhnlich wird weiteres Phänomen auch als hybrid bezeichnet, obwohl der Werteverlauf kontinuierlich bleibt:] „Schalten" (engl. "Switching")

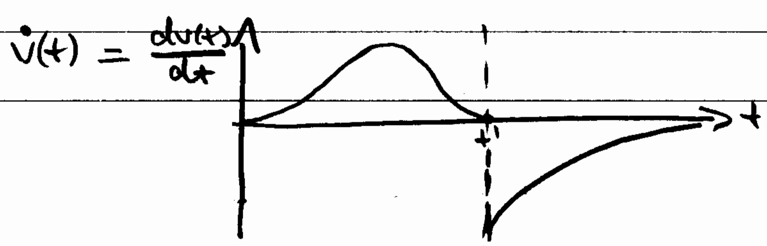
(2) Bsp.:



(? s.o.)

$$\lim_{\Delta t \to 0} v(t'-\Delta t) = \lim_{\Delta t \to 0} v(t'+\Delta t)$$

aber $$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{dv(t'-\Delta t)}{dt} \neq \lim_{\Delta t \to 0} \frac{dv(t'+\Delta t)}{dt}$$



Schalten
= Sprung in erster zeitl. Ableitung

Im Folgenden vereinfacht:

kontinuierliches Signal = wertkontinuierliches (incl. quasikontinuierl.) Signal

~~diskretes Signal = ereignisdiskretes (also „grob wertdiskretes") Signal~~

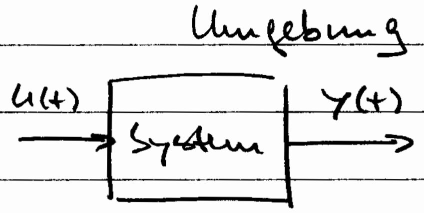
Wann werden welche Signalklassen zur Modellierung verwendet?

kontinuierl. Signale :
- physikalisch/chemische Vorgänge
- Approximation von diskreten Vorgängen (z.B. Verkehrsflüsse)

diskrete Signale :
- von Menschen interpretierte oder spezifizierte Vorgänge (z.B. Ablauf eines Produktionsprozesses oder Programms, Einteilung in sichere u. unsichere Zustände, Ausgaben diskreter Messglieder)

hybride Signale :
- Mischung von physikalischen und „Man-made"-Vorgängen (z.B. Batch-Prozess, Chemie)
- Approximation von schnellen Vorgängen im Zusammenwirken mit langsamen Vorgängen

2.3 Systeme



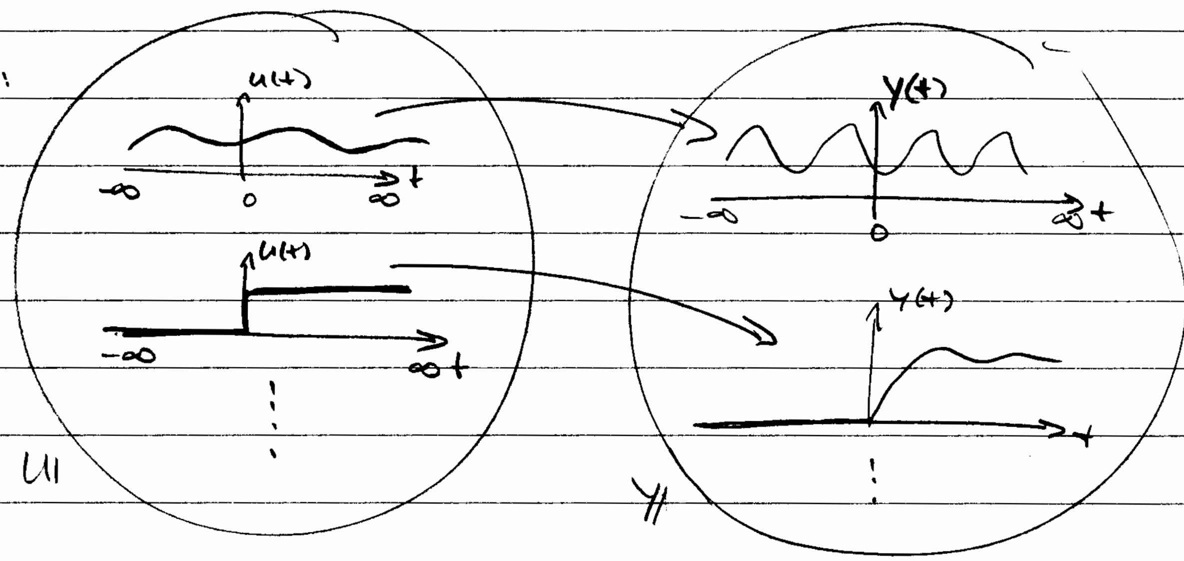
(Bei Ingenieuren beliebt: Ein-/Ausgangsdarstellung)

$u(t)$: Eingangssignal

$y(t)$: Ausgangssignal

Def. System S: Menge aller Eingangssignale $\mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{Y}$ Menge aller Ausgangssignale

Bsp.:



In der ingenieurswiss. Systemtheorie ist die Abbildung S vollständig definiert, d.h. für jedes Element aus $\mathcal{U}$ muss ein Ausgangssignal definiert sein.

= „freie" Eingänge (System kann keinen Eingangsverlauf „ablehnen".)

$u(t), y(t)$ kontinuierlich → kontinuierliche Systeme

$u(t), y(t)$ diskret → diskrete Systeme

Mischung oder $u(t), y(t)$ hybrid → hybride "

Statische vs. dynamische Systeme

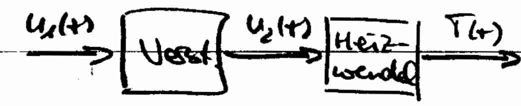
Statisches System: $y(t) = f(u(t))$

z.B. $y(t) = 2 \cdot u(t)$

⇒ Zu jedem Zeitpunkt t kann Wert von $y(t)$ aus aktuellem Wert $u(t)$ bestimmt werden.

Die Vergangenheit ist irrelevant.

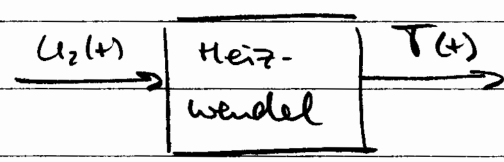
Beispiele: Operationsverstärker (Idealisierung!)

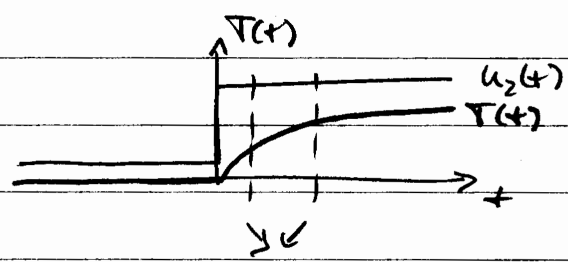


Schaltfunktion

Dynamisches System:

Bsp.:





Bei gleichem Wert von u unterschiedliche Werte von y!

⇒ Vergangenheit ist relevant!

Salopp: Dynamische Systeme sind Systeme „mit Gedächtnis"!

diskretes Beispiel: Schaltwerk

Beschreibung dynamischer Systeme:

1. Möglichkeit:

Operatoren, ~~die die~~ Abbildung $S: \mathcal{U} \to \mathcal{Y}$ realisieren.

Für kontinuierliche Signale gebräuchlich:

- Übertragungsfkt. im Laplacebereich

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s) \cdot \mathcal{L}\{u(t)\}\}$$

- „Faltungsintegral"

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \cdot g(t-\tau)\, d\tau$$

Für diskrete Signale?

2. Möglichkeit:

Einführung einer Hilfsgröße, die die Information über die Vergangenheit (des Eingangsgrößenverlaufs) repräsentiert, die zur Bestimmung von y benötigt wird.

(Wie nennt man eine solche Hilfsgröße?)

$\to$ Zustand x

(auch ein Signal nach unserer Definition)

Zustandsdarstellung dynamischer Systeme

1. kontinuierliche Systeme (auch x(t) kontin.!)

(1.a) kontinuierliche Zeit:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t))$$

$$y(t) = g(x(t), u(t))$$

"Zustandsraumdarstellung" kontin. dyn. Systeme

Kalman, Brockett, 60er Jahre

(1.b) diskrete Zeit:

$$x(k+1) = f(x(k), u(k))$$

$$y(k) = g(x(k), u(k))$$

2. diskrete Systeme (u, y, x ∈ Menge von Symbolen!)

(diskrete Zeit oder nicht-quantifizierte Zeit:)

$$x(k+1) = f(x(k), u(k))$$

$$y(k) = g(x(k), u(k)) \quad = \text{Mealy-Automat}$$

oder $y(k) = g(x(k))$ = Moore-Automat

beim nächsten Mal weiter mit hybriden dynamischen Systemen